TD 4

Fonctions circulaires et hyperboliques

8 heures – Modules 17 et 18

Questions de cours.

1) a) On a, pour tout $y \in \left]-1, 1\right[$,
$$\arccos'(y) = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$
et

y	-1 $\qquad$ 1
$\arccos'(y)$	$-$
$\arccos$	$\pi \searrow 0$

b) On a, pour tout $y \in \left]-1, 1\right[$,
$$\arcsin'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$
et

y	-1 $\qquad$ 1
$\arcsin'(y)$	$+$
$\arcsin$	$-\frac{\pi}{2} \nearrow \frac{\pi}{2}$

c) On a, pour tout $y \in \mathbb{R}$,
$$\arctan'(y) = \frac{1}{1+y^2}$$
et

y	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$\arctan'(y)$	$+$
$\arctan$	$-\frac{\pi}{2} \nearrow \frac{\pi}{2}$

2) a) La fonction $\cosh$ est définie sur $\mathbb{R}$ et a pour expression :
$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

b) La fonction $\sinh$ est définie sur $\mathbb{R}$ et a pour expression :
$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

c) La fonction $\tanh$ est définie sur $\mathbb{R}$ et a pour expression :

$$\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

3) La fonction $\operatorname{argsinh}$, aussi notée $\sinh^{-1}$, est la bijection réciproque de $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
Soit $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} \sinh(x) = y \quad & \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) = y \\ & \Leftrightarrow \quad e^x - e^{-x} = 2y \\ & \Leftrightarrow \quad e^{2x} - 1 = 2ye^x \\ & \Leftrightarrow \quad e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0. \end{aligned}$$

En posant $u = e^x$, on obtient

$$\sinh(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad u^2 - 2yu - 1 = 0.$$

Les solutions de cette équation du second degré sont

$$u_1 = y - \sqrt{y^2 + 1} \quad \text{et} \quad u_2 = y + \sqrt{y^2 + 1}.$$

Or, l'expression u_1 est toujours négative : si y est négatif, c'est immédiat, et si y est positif on a bien

$$y^2 \leqslant y^2 + 1 \implies y = \sqrt{y^2} \leqslant \sqrt{y^2 + 1}$$

par croissance de la fonction racine carrée. Ainsi l'équation $e^x = u_1$ n'a pas de solution et on trouve donc :

$$\sinh(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad e^x = y + \sqrt{y^2 + 1} \quad \Leftrightarrow \quad x = \ln\left(y + \sqrt{y^2 + 1}\right)$$

d'où l'expression

$$\arg\sinh(y) = \ln\left(y + \sqrt{y^2 + 1}\right).$$

4) La fonction $\operatorname{argcosh}$ (parfois notée $\cosh^{-1}$, mais c'est un abus de notation !) est la bijection réciproque de la restriction $\cosh : \mathbb{R}_+ \to [1, +\infty[$.
Soit $(x, y) \in \mathbb{R}_+ \times [1, +\infty[$. On a

$$\begin{aligned} \cosh(x) = y \quad & \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) = y \\ & \Leftrightarrow \quad e^x + e^{-x} = 2y \\ & \Leftrightarrow \quad e^{2x} + 1 = 2ye^x \\ & \Leftrightarrow \quad e^{2x} - 2ye^x + 1 = 0. \end{aligned}$$

En posant $u = e^x$, on obtient

$$\cosh(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad u^2 - 2yu + 1 = 0.$$

Les solutions de cette équation du second degré sont

$$u_1 = y - \sqrt{y^2 - 1} \quad \text{et} \quad u_2 = y + \sqrt{y^2 - 1}.$$

Or, on peut montrer que u_1 est strictement inférieur à 1, donc l'équation $e^x = u_1$ admet une solution $x = \ln(u_1)$ strictement négative, que l'on ne retient pas (puisque par hypothèse $x \in \mathbb{R}_+$). Ainsi

$$\cosh(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad e^x = y + \sqrt{y^2 - 1} \quad \Leftrightarrow \quad x = \ln\left(y + \sqrt{y^2 - 1}\right)$$

d'où l'expression

$$\operatorname{argcosh}(y) = \ln\left(y + \sqrt{y^2 - 1}\right).$$

Avec la même méthode que pour ces deux dernières questions de cours, on pourrait retrouver l'expression :

$$\operatorname{argtanh}(y) = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+y}{1-y}\right|.$$

Exercice 1

1) À l'aide des valeurs remarquables de cosinus, sinus et tangente, on trouve :

$$\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}, \qquad \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6} \qquad \text{et} \qquad \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\pi}{6}.$$

2) — À partir de la relation $\cos^x + \sin^x = 1$, on peut retrouver la formule de cours

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)} = \sqrt{1 - x^2}$$

qui donne en particulier :

$$\cos\left(\arcsin\left(\frac{2}{3}\right)\right) = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

— De la même manière, la relation

$$\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - \cos^2(\arccos x)} = \sqrt{1 - x^2}$$

donne en particulier

$$\sin\left(\arccos\left(\frac{4}{5}\right)\right) = \frac{3}{5}.$$

— On rappelle la relation :

$$\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

d'où l'on obtient

$$\cos^2(\arctan x) = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan x)} = \frac{1}{1 + x^2}$$

et donc en particulier

$$\cos\left(\arctan\left(\frac{-1}{3}\right)\right) = \frac{3}{\sqrt{10}}.$$

3) — On rappelle que $\cos(2a) = 1 - 2\sin^2 a$, d'où

$$\sin^2\left(\frac{1}{2}x\right) = \frac{1 - \cos(x)}{2}.$$

En reprenant les formules rappelées plus haut, on trouve alors

$$\sin^2\left(\frac{1}{2}\arcsin x\right) = \frac{1-\cos(\arcsin x)}{2} = \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{2}.$$

En particulier, cela nous permet d'obtenir

$$\sin\left(\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{1}{3}\right)\right) = \sqrt{\frac{3-2\sqrt{2}}{6}}$$

— Pour les calculs suivants, il s'agit à nouveau de valeurs remarquables, mais il faut être vigilant sur les domaines d'arrivée d'$\arccos$ et $\arcsin$:

$$\arcsin\left(\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right) = -\frac{\pi}{2} \qquad \text{et} \qquad \arctan\left(\tan\left(\frac{9\pi}{4}\right)\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Exercice 2

1) Posons $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right).$$

Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ on a

$$f'(x) = f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2}\frac{1}{1+\dfrac{1}{x^2}} = 0.$$

Ainsi, on en déduit que :

— f est constante à une valeur c_1 sur l'intervalle $]-\infty, 0[$,

— f est constante à une valeur c_2 sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

En évaluant f en $x = 1$ ou en $x = \sqrt{3}$, ou encore en prenant sa limite quand x tend vers $+\infty$, on trouve

$$c_2 = \frac{\pi}{2}.$$

De même, en évaluant f en $x = -1$ ou en $x = -\sqrt{3}$, ou en prenant sa limite en $-\infty$, ou même encore en remarquant que f est impaire, on trouve

$$c_1 = -\frac{\pi}{2}.$$

Ceci nous permet d'affirmer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f(x) = \arctan x + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & \text{si } x > 0, \\ -\dfrac{\pi}{2} & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

2) Posons $f :]-1, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \arctan\left(\frac{x-1}{x+1}\right) - \arctan x.$$

Sur $]-1,+\infty[$, la fonction rationnelle $x \mapsto \frac{x-1}{x+1}$ est définie, continue et dérivable, à valeurs dans $\mathbb{R}$ où arctan est dérivable. Par composée et somme, on en déduit que f est dérivable. Pour tout $x \in]-1,+\infty[$ on a :

$$f'(x) = \frac{(x+1)-(x-1)}{(x+1)^2} \frac{1}{1+\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0.$$

Ceci nous permet d'affirmer que f est constante à une valeur c sur l'intervalle $]-1,+\infty[$. Pour trouver c on peut, par exemple, évaluer f en $x = 0$. On trouve alors :

$$\forall x > -1, \quad f(x) = f(0) = \arctan -1 - \arctan 0 = -\frac{\pi}{4},$$

ce qui revient bien à

$$\arctan\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = -\frac{\pi}{4} + \arctan x.$$

3) Posons $f :]-1,1[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \arcsin x + \arccos x.$$

La fonction f est dérivable sur $]-1,1[$, et pour tout $x \in]-1,1[$ on a :

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} = 0.$$

On en déduit alors que la fonction f est constante à une valeur c sur $]-1,1[$. Pour trouver c, on peut évaluer en n'importe quelle valeur remarquable $x \in]-1,1[$. Par exemple pour $x = 0$, on trouve

$$c = \arcsin 0 + \arccos 0 = \frac{\pi}{2}$$

d'où l'égalité demandée.

Remarque : la fonction f était même définie et continue sur $[-1,1]$ (mais pas dérivable en $x = -1$ et $x = 1$). Par continuité, on peut donc en déduire que f est constante sur $[-1,1]$, et donc étendre l'égalité demandée à cet intervalle.

Exercice 3

1) Par composée de limites, on trouve

$$\lim_{x\to 0^-} \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2} \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 0^+} \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Ceci nous donne alors

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0 \times \left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = 0 \times \frac{\pi}{2} = 0.$$

Ainsi, la limite $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ existe, et de plus elle est bien égale à $f(0)$ qui vaut 0. La fonction f est donc continue en $x = 0$.

2) Il faut maintenant étudier les limites à gauche et à droite du taux d'accroissement

$$\tau(x) = \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{1}{x}\right).$$

Ces deux limites existent bien, plus précisément on a :

$$f'_g(0) = \lim_{x\to 0^-} \tau(x) = \frac{1}{\pi} \times \left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad f'_d(0) = \lim_{x\to 0^+} \tau(x) = \frac{1}{\pi} \times \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}.$$

3) Comme ses limites à gauche et droite sont différentes, la limite en zéro du taux d'accroissement $\tau(x)$ n'existe pas, et donc f n'est pas dérivable en zéro.

Exercice 4

1) On rappelle que la fonction $\arcsin$ est définie sur $[-1, 1]$. Ainsi, f_1 est définie pour tout x vérifiant l'inégalité :

$$(E_1) : \qquad -1 \leqslant \frac{2e^x - 3}{e^x + 1} \leqslant 1.$$

Résolvons cette inégalité. On trouve :

$$\begin{aligned}
(E_1) \quad &\iff \quad -(e^x + 1) \leqslant 2e^x - 3 \quad \text{et} \quad 2e^x - 3 \leqslant e^x + 1 \quad (\text{car } e^x + 1 > 0) \\
&\iff \quad 2 \leqslant 3e^x \quad \text{et} \quad e^x \leqslant 4 \\
&\iff \quad \ln\left(\tfrac{2}{3}\right) \leqslant x \quad \text{et} \quad x \leqslant \ln(4) \quad (\text{car } \ln \text{ strictement croissante})
\end{aligned}$$

d'où finalement f_1 est définie sur l'intervalle $I = [\ln \frac{2}{3}, \ln 4]$.

Rappelons aussi que $\arcsin$ est dérivable sur $]-1, 1[$, donc f_1 est dérivable en tout point x tel que

$$-1 < \frac{2e^x - 3}{e^x + 1} < 1.$$

Sans refaire les calculs, on trouve donc que f_1 est dérivable sur $]\ln \frac{2}{3}, \ln 4[$. Déterminons maintenant l'expression de sa dérivée :

$$f'_1(x) = \frac{2 + 5e^x}{(e^x + 1)^2} \times \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{2e^x - 3}{e^x + 1}\right)^2}}.$$

Ici on se contente de cette expression non-simplifiée, car cela suffit pour déterminer que le signe de $f'_1(x)$ est le même que celui de $2 + 5e^x$ (qui est toujours strictement positif sur l'intervalle I).

Il suffit donc maintenant de calculer les valeurs au bord de I, à savoir

$$f_1(\ln \tfrac{2}{3}) = \arcsin -1 = -\frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad f_1(\ln 4) = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$$

pour obtenir le tableau de variations ci-dessous.

x	$\ln \frac{2}{3}$		$\ln 4$
$f'_1(x)$		$+$	
f_1	$-\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$

On laisse au lecteur le soin de tracer la représentation graphique correspondante.

2) De la même manière, f_2 est définie en tout point x vérifiant l'inégalité :

$$(E_2) : \quad -1 \leqslant \frac{2x}{1+x^2} \leqslant 1$$

(et dérivable en tout point x vérifiant l'inégalité stricte correspondante). La résolution de cette équation donne

$$\begin{aligned} (E_2) \quad &\iff \quad -(1+x^2) \leqslant 2x \quad \text{et} \quad 2x \leqslant 1+x^2 \qquad (\text{car } 1+x^2>0) \\ &\iff \quad 0 \leqslant 1+2x+x^2 \quad \text{et} \quad 0 \leqslant 1-2x+x^2 \\ &\iff \quad 0 \leqslant (1+x)^2 \quad \text{et} \quad 0 \leqslant (1-x)^2 \end{aligned}$$

d'où finalement f_2 est définie sur $\mathbb{R}$, et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$,

$$f_2'(x) = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} \times \frac{-1}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)^2}}.$$

Là encore, on ne cherche pas à simplifier cette expression car on peut déjà observer que son signe est l'opposé de celui de $(1-x^2) = (1-x)(1+x)$.

Pour obtenir le tableau de variations complet de f_2, il ne nous reste qu'à calculer ses valeurs remarquables :

$$f_2(-1) = \arccos -1 = \pi \qquad \text{et} \qquad f_2(1) = \arccos 1 = 0$$

ainsi que ses limites :

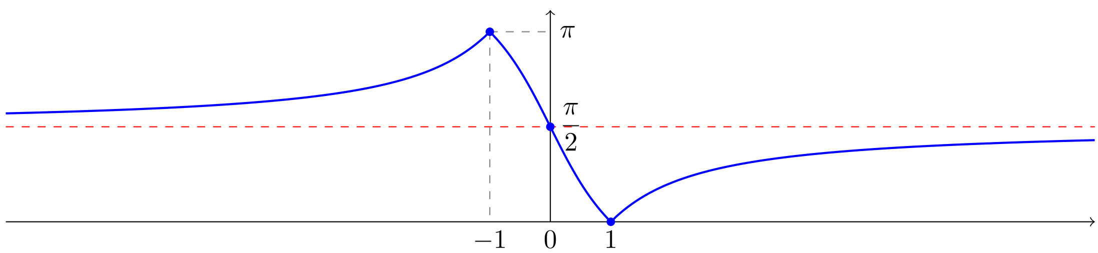
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \arccos 0 = \frac{\pi}{2} \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = \arccos 0 = \frac{\pi}{2}.$$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$-$	‖	$+$	
f	$\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	π	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$

À titre informatif (ce n'était pas demandé, mais cela permet de préciser un peu le tracé), on peut aussi calculer :

$$f_2(0) = \arccos 0 = \frac{\pi}{2} \qquad \text{et} \qquad f_2'(0) = 2 \times \frac{-1}{\sqrt{1}} = -2.$$

On obtient finalement la courbe représentative suivante :



Exercice 5

On simplifie les expressions données en utilisant le fait que $\exp$ et $\ln$ sont bijections réciproques l'une de l'autre, d'où en particulier :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad e^{\ln x} = x.$$

On rappelle aussi que $e^{-a} = (e^a)^{-1}$ et que $-\ln x = \ln(x^{-1})$, l'une ou l'autre de ces formules (au choix) permettant de trouver :

$$\cosh\left(\ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{2}{1+\sqrt{5}}\right) = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

et

$$\sinh\left(\ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{2}{1+\sqrt{5}}\right) = \frac{1}{2}.$$

Exercice 6

1) En utilisant les mêmes propriétés que dans l'exercice précédent, on trouve pour tout $x > 0$,

$$\frac{\cosh(\ln x) + \sinh(\ln x)}{x} = \frac{1}{2x}\left(\left(x + \frac{1}{x}\right) + \left(x - \frac{1}{x}\right)\right) = 1.$$

2) Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned} 2\cosh x + 3\sinh x = 1 &\iff (e^x + e^{-x}) + \frac{3}{2}(e^x - e^{-x}) = 1 \\ &\iff 5e^x - e^{-x} = 2 \\ &\iff 5e^x - 2 - \frac{1}{e^x} = 0 \\ &\iff 5(e^x)^2 - 2e^x + 1 = 0 \end{aligned}$$

On reconnaît une équation du second degré d'inconnue $X = e^x$. Ses solutions sont :

$$X_1 = \frac{1-\sqrt{6}}{5} \qquad \text{et} \qquad X_2 = \frac{1+\sqrt{6}}{5}.$$

Or, X_1 est négatif donc l'équation $e^x = X_1$ n'a pas de solution, d'où finalement :

$$2\cosh x + 3\sinh x = 1 \iff e^x = X_2 \iff x = \ln\left(\frac{1+\sqrt{6}}{2}\right).$$

3) *Comme*

$$\lim_{x\to+\infty} \cosh x = +\infty \qquad \textit{et} \qquad \lim_{y\to+\infty} \ln(y) = +\infty,$$

on trouve par composée $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(\cosh x) = +\infty$ *ce qui conduit en premier lieu à une forme indéterminée dans le calcul de la limite demandée. On va donc essayer d'isoler le terme qui dicte le comportement quand* $x \to +\infty$ *dans l'expression :*

$$\ln(\cosh x) = \ln\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right).$$

On soupçonne ici le terme e^x*, d'où les calculs qui suivent.*

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\ln(\cosh x) = \ln\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) = \ln\left(e^x\left(\frac{1+e^{-2x}}{2}\right)\right) = \ln e^x + \ln\left(\frac{1+e^{-2x}}{2}\right)$$

d'où :

$$\ln(\cosh x) - x = \left(x + \ln\left(\frac{1+e^{-2x}}{2}\right)\right) - x = \ln\left(\frac{1+e^{-2x}}{2}\right).$$

On en déduit que :

$$\lim_{x\to+\infty} \ln(\cosh x) - x = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 2.$$

Exercice 7

1) La relation demandée est $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$, elle se démontre par un calcul direct :

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2x} + 2e^0 + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2e^0 + e^{-2x}}{4} = \frac{4}{4} = 1.$$

2) La fonction $\sinh$ est définie (resp. continue et dérivable) sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ où $\arctan$ est définie (resp. continue et dérivable), donc par composée de fonctions, f est définie (resp. continue et dérivable) sur $\mathbb{R}$.

   D'une part, la fonction $\sinh$ est définie (resp. continue et dérivable sur $\mathbb{R}$). D'autre part, la fonction $\cosh$ est continue (resp. continue et dérivable) et strictement positive sur $\mathbb{R}$, il en est donc de même pour $x \mapsto 1 + \cosh x$. Par quotient, on en déduit que la fonction

$$x \mapsto \frac{\sinh x}{1 + \cosh x}$$

   est définie (resp. continue et dérivable) sur $\mathbb{R}$. De plus, cette fonction prend ses valeurs dans $\mathbb{R}$ où $\arctan$ est définie (resp. continue et dérivable) donc par composée la fonction g est définie (resp. continue et dérivable) sur $\mathbb{R}$.

3) La dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$ a été justifiée dans la question précédente. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$f'(x) = \frac{1}{2} \times \cosh x \times \frac{1}{1 + \sinh^2 x} = \frac{1}{2} \times \frac{\cosh x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{2\cosh x}$$

   (en utilisant la relation $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ rappelée dans la question 1).

4) La dérivabilité de la fonction g sur $\mathbb{R}$ a été justifiée dans la question 2. Soit $x \in \mathbb{R}$. D'une part, on a

$$\left(\frac{\sinh x}{1 + \cosh x}\right)' = \frac{\cosh x(1 + \cosh x) - \sinh^2 x}{(1 + \cosh x)^2} = \frac{\cosh x + 1}{(1 + \cosh x)^2}.$$

   D'autre part, toujours en utilisant la relation $\sinh^2 x = \cosh^2 x - 1$,

$$\arctan'\left(\frac{\sinh x}{1 + \cosh x}\right) = \frac{1}{1 + \left(\frac{\sinh x}{1+\cosh x}\right)^2} = \frac{(1 + \cosh x)^2}{(1 + \cosh x)^2 + \sinh^2 x} = \frac{(1 + \cosh x)^2}{2\cosh x(1 + \cosh x)}.$$

   De là, on obtient :

$$g'(x) = \left(\frac{\sinh x}{1 + \cosh x}\right)' \times \arctan'\left(\frac{\sinh x}{1 + \cosh x}\right) = \frac{1}{2\cosh x}.$$

5) Posons la fonction $h = g - f$, qui est dérivable sur $\mathbb{R}$ puisque f et g le sont. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$h'(x) = g'(x) - f'(x) = 0$$

puisqu'on a trouvé la même expression pour $f'(x)$ et $g'(x)$. Ceci garantit que la fonction h est constante à une valeur c sur l'intervalle $\mathbb{R}$. Pour trouver la valeur de c, on peut par exemple évaluer la fonction h en $x = 0$. On trouve :

$$c = g(0) - f(0) = \frac{1}{2}\arctan(0) - \arctan(0) = 0.$$

Finalement, on trouve que la fonction h est nulle, c'est-à-dire que $f = g$.

Remarque : le raisonnement ci-dessus nous montre que lorsque $f' = g'$, cela ne garantit pas que les fonctions f et g sont égales, mais seulement que leur différence $g - f$ est constante sur chaque ***intervalle*** *où elle est définie.*

6) a) En utilisant convenablement les propriétés de l'exponentielle et du logarithme, on trouve :

$$\cosh\left(\frac{1}{2}\ln 3\right) = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{1}{2}\ln 3} + e^{-\frac{1}{2}\ln 3}\right) = \frac{1}{2}\left(3^{\frac{1}{2}} + 3^{-\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Avec un raisonnement analogue, on obtient

$$\sinh\left(\frac{1}{2}\ln 3\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

b) Avec les calculs précédents, on trouve d'une part

$$f\left(\frac{1}{2}\ln 3\right) = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12},$$

et d'autre part

$$g\left(\frac{1}{2}\ln 3\right) = \arctan\left(\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + \frac{2}{\sqrt{3}}}\right) = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}+2}\right).$$

Comme les fonctions f et g sont égales, on en déduit que

$$\frac{\pi}{12} = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}+2}\right)$$

ce qui revient à affirmer que

$$\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}+2}.$$