Mathématiques – MA112 – Partiel du 04/02/2021
Correction des exercices

Exercice 1.

1. Par définition, ϕ vérifie la relation $\phi^2 - \phi - 1 = 0$, soit encore $\phi^2 = 1 + \phi$. En appliquant la fonction racine carrée, on trouve donc $\phi = \pm\sqrt{1+\phi}$, mais comme ϕ est défini comme étant positif, on retient seulement la relation $\phi = \sqrt{1+\phi}$ demandée.
2. Une solution élégante est d'étudier la fonction $g : x \mapsto x^2 - x - 1$. Comme il s'agit d'une fonction polynômiale de degré 2, on sait qu'elle est continue sur $\mathbb{R}$ et on obtient sans difficulté ses variations :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{5}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

En remarquant que
$$g(\sqrt{2}) = 1 - \sqrt{2} < 0 \qquad \text{et} \qquad g(2) = 1 > 0,$$
on peut affirmer d'après le théorème de la bijection qu'il existe un unique $x_0 \in]\sqrt{2}, 2[$ tel que $g(x_0) = 0$. Comme par définition ϕ est précisément l'unique zéro de g sur $\mathbb{R}_+$, on a bien $\sqrt{2} < \phi < 2$.

Sinon, un autre solution était de résoudre directement $x^2 - x - 1 = 0$ pour trouver l'expression exacte
$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$
et travailler à partir de celle-ci.

3. Procédons par récurrence et considérons l'assertion $P(n)$: « $1 < u_n < \phi$ ».
   - **Initialisation.** Pour $n = 1$, on trouve $u_1 = \sqrt{1+u_0} = \sqrt{2}$. On a clairement $1 < \sqrt{2}$ tandis que la question précédente nous donne $\sqrt{2} < \phi$, ainsi la proposition $P(1)$ est vraie.
   - **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire que $1 < u_n < \phi$. En ajoutant 1 à chaque membre puis en appliquant la fonction racine carrée, croissante sur $\mathbb{R}_+$, on trouve
   $$\sqrt{2} < \sqrt{1+u_n} < \sqrt{1+\phi}.$$
   Or $\sqrt{1+u_n} = u_{n+1}$ par définition de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ tandis que $\sqrt{1+\phi} = \phi$ d'après la question 1. Ceci nous donne finalement
   $$1 < \sqrt{2} < u_{n+1} < \phi$$
   et donc la proposition $P(n+1)$ est vraie.

   On vient donc de démontrer que pour tout $n \geqslant 1$, on a $1 < u_n < \phi$.
4. On peut essayer de raisonner par équivalence. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$u_n \leqslant u_{n+1} \iff u_n \leqslant \sqrt{1+u_n} \iff u_n^2 \leqslant 1 + u_n \iff u_n^2 - u_n - 1 \leqslant 0$$
Notons qu'on a bien équivalence en appliquant la fonction carrée car (u_n) est à termes positifs d'après la question 3. Plus précisément, cette question nous indique que u_n appartient à l'intervalle $[1, \phi]$, et d'après l'étude réalisé à la question 2, le polynôme $x^2 - x - 1$ est négatif sur cet intervalle. Ceci nous garantit que l'assertion $u_n^2 - u_n - 1 \leqslant 0$ est vraie, et donc que la suite (u_n) est croissante.

5. D'après les questions précédentes, la suite (u_n) est croissante et majorée par ϕ, elle converge donc vers une limite ℓ. Plus précisément, l'encadrement obtenu à la question 3 nous garantit, par passage à la limite, que ℓ appartient à $[1, \phi]$.
   Or, on peut remarquer que $(u_n)_{n \geqslant 0}$ est une suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ avec
   $$f : x \mapsto \sqrt{1+x}.$$
   Par composée des fonctions usuelles $x \mapsto 1+x$ et $x \mapsto \sqrt{x}$, cette fonction est continue sur son ensemble de définition $[-1, +\infty[$ (et donc en particulier sur l'intervalle $[1, \phi]$ contenant les termes de la suite (u_n)). On en déduit que ℓ est un point fixe de f. On a alors $\ell = \sqrt{1+\ell}$, c'est-à-dire $\ell^2 = 1+\ell$ (car ℓ est positif). Autrement dit ℓ est une solution positive de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$, ce qui par définition signifie que ℓ n'est autre que le nombre d'or ϕ.

   Remarque. On pouvait aussi traiter les questions 3 et 4 en utilisant un seul théorème du cours. En effet, étant donné que :
   — *la fonction f est continue sur $[0, \phi]$,*
   — *la fonction f est croissante sur $[0, \phi]$ (car sa dérivée est positive),*
   — *$f([0, \phi]) \subset [0, \phi]$ (car f est croissante, $f(0) = 1$ et $f(\phi) = \sqrt{1+\phi} = \phi$),*
   — *u_0 appartient à l'intervalle $[0, \phi]$,*

   on peut affirmer que la suite (u_n) est monotone et converge vers un point fixe $\ell \in [0, \phi]$ de f. Ainsi,
   — *pour répondre à la question 4 il n'y a plus qu'à comparer u_0 et u_1 : on trouve respectivement 1 et $\sqrt{2}$, donc $u_0 \leqslant u_1$, et donc (u_n) est croissante,*
   — *pour répondre à la question 5, il n'y a plus qu'à vérifier que les points fixes de f sont précisément les solutions de $x^2 - x - 1 = 0$, la seule solution positive étant ϕ.*
6. On a montré que la suite (u_n) était croissante : elle est donc minorée par son premier terme $u_0 = 1$, qui est alors à la fois le minimum et la borne inférieure de A. Comme de plus (u_n) converge vers ϕ (question 5) sans jamais valoir ϕ (question 3), on peut affirmer que A n'admet pas de maximum, et que sa borne supérieure est ϕ.
7. a) Ligne 4, à la place des points de suspension, il suffit d'écrire `u = (1 + u)**(1/2)`.
   b) En modifiant la ligne 1 de sorte à prendre une valeur de n très grande, le programme calculera le terme u_n qui sera (intuitivement) une valeur approchée de ϕ d'autant plus précise que n sera grand.

Exercice 2.

$$\arctan(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}, \qquad \arcsin\left(\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right) = -\frac{\pi}{4}, \qquad \cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}.$$

Exercice 3.

1. Pour tout $x \neq 0$,
   $$f(x) = 2x^2 \times \frac{e^{\ln x^2} + e^{-\ln x^2}}{2} = x^2 \times \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = x^4 + 1.$$
2. Ainsi, on a pour tout $x \neq 0$,
   $$f(x) = x^4 + 1 \xrightarrow[x \to 0]{} 1 = f(0)$$
   donc la fonction f est continue en $x = 0$.
3. Pour tout $x \neq 0$, on a :
   $$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{(x^4+1) - 1}{x} = x^3 \xrightarrow[x \to 0]{} 0$$
   donc la fonction f est dérivable en $x = 0$ (et on a $f'(0) = 0$).

Exercice 4.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \frac{2n\left(1+\dfrac{(-1)^n}{2n}\right)}{3n\left(1+\dfrac{4}{3n}\right)} = \frac{2}{3} \times \frac{1+\dfrac{(-1)^n}{2n}}{1+\dfrac{4}{3n}}.$$

Or, à partir de l'encadrement $-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$, on obtient l'encadrement

$$-\frac{1}{2n} \leqslant \frac{(-1)^n}{2n} \leqslant \frac{1}{2n}.$$

En remarquant que $\lim\limits_{n\to+\infty} -\dfrac{1}{2n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2n} = 0$, le lemme d'encadrement nous assure que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{2n} = 0$$

ce qui nous permet finalement de trouver

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{3} \times \frac{1+\frac{(-1)^n}{n}}{1+\frac{4}{3n}} = \frac{2}{3}.$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = \frac{5^n\left(1-\dfrac{2^n}{5^n}\right)}{7^n\left(\dfrac{3^n}{7^n}-1\right)} = \left(\frac{5}{7}\right)^n \times \frac{1-\left(\dfrac{2}{5}\right)^n}{\left(\dfrac{3}{7}\right)^n-1}.$$

Comme $\dfrac{5}{7}$, $\dfrac{2}{5}$ et $\dfrac{3}{7}$ appartiennent à $]-1,1[$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{5}{7}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{3}{7}\right)^n = 0$$

et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0 \times (-1) = 0$.

Exercice 5.

1. a) Pour $x = 2$ et $y = 5{,}8$ on a

$$|\mathcal{E}(y) - \mathcal{E}(x)| = |5-2| = 3 \qquad \text{et} \qquad |y-x| = |5{,}8-2| = 3{,}8 > 3.$$

   b) Pour $x = 2{,}3$ et $y = 5$ on a

$$|\mathcal{E}(y) - \mathcal{E}(x)| = |5-2| = 3 \qquad \text{et} \qquad |y-x| = |5-2{,}3| = 2{,}7 < 3.$$

2. a) Si $x \leqslant y$, alors $y-x$ est positif et donc $|y-x| = y-x$. De plus, la fonction partie entière étant croissante, on a aussi $\mathcal{E}(x) \leqslant \mathcal{E}(y)$, donc $\mathcal{E}(y)-\mathcal{E}(x)$ est positif et $|\mathcal{E}(y)-\mathcal{E}(x)| = \mathcal{E}(y)-\mathcal{E}(x)$. Ainsi,

$$|\mathcal{E}(y) - \mathcal{E}(x)| - |y-x| = (\mathcal{E}(y) - \mathcal{E}(x)) - (y-x) = \mathcal{E}(y) - \mathcal{E}(x) - y + x.$$

   b) Par définition de la partie entière, on a

$$\mathcal{E}(x) \leqslant x < \mathcal{E}(x)+1 \qquad \text{et} \qquad \mathcal{E}(y) \leqslant y < \mathcal{E}(x)+1.$$

   Ainsi, en sommant :

— les inégalités $\mathcal{E}(y) \leqslant y$ et $x < \mathcal{E}(x) + 1$, on trouve $\mathcal{E}(y) + x < y + 1 + \mathcal{E}(x)$,

— les inégalités $y < \mathcal{E}(y) + 1$ et $\mathcal{E}(x) \leqslant x$, on trouve $y + \mathcal{E}(x) < \mathcal{E}(y) + x + 1$.

c) L'inégalité $\mathcal{E}(y) + x < y + 1 + \mathcal{E}(x)$ peut se réécrire

$$\mathcal{E}(y) - \mathcal{E}(x) - y + x < 1$$

tandis que l'inégalité $y + \mathcal{E}(x) < \mathcal{E}(y) + x + 1$ peut se réécrire

$$-1 < \mathcal{E}(y) - \mathcal{E}(x) - y + x.$$

En utilisant le résultat de la question 2, ceci montre bien que pour $x \leqslant y$ on a :

$$-1 < |\mathcal{E}(y) - \mathcal{E}(x)| - |y - x| < 1.$$

3. Si maintenant on suppose $y \leqslant x$, alors on peut refaire le même raisonnement que dans la question 2 mais en échangeant les rôles de x et y. Cela donne l'encadrement :

$$-1 < |\mathcal{E}(x) - \mathcal{E}(y)| - |x - y| < 1.$$

Il suffit ensuite de remarquer que, par parité de la fonction valeur absolue, on a

$$|\mathcal{E}(y) - \mathcal{E}(x)| = |\mathcal{E}(y) - \mathcal{E}(x)| \qquad \text{et} \qquad |y - x| = |x - y|.$$