Ma111 - Devoir Surveillé du 22 octobre 2020
Correction des exercices

Exercice 1.

1. $f \circ f \circ f(6) = f \circ f(4) = f(2) = 3$.
2. $f([-2;2[) = [2,4]$.
3. $f^{-1}([2;4]) = [-2;6]$.
4. $f^{-1}(]-1;2]) =]-3;-2] \cup \{4\}$.
5. f n'est pas injective (par exemple, on voit que $f(-2) = f(4)$) mais f est surjective.

Exercice 2.

1. a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$\begin{aligned} f(x) = 0 \quad &\iff \quad (x+2)(x-1) = 0 \\ &\iff \quad x+2 = 0 \text{ ou } x-1 = 0 \\ &\iff \quad x = -2 \text{ ou } x = 1 \end{aligned}$$

d'où $Z_f = \{-2;1\}$. L'ensemble Z_f est de cardinal 2.

b) Par suite, on a :

$$\mathcal{P}(Z_f) = \{\varnothing; \{-2\}; \{1\}; \{-2;1\}\}.$$

L'ensemble $\mathcal{P}(Z_f)$ est de cardinal 4 (ce qui correspond bien à $2^{\mathrm{card}(Z_f)}$).

2. a) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Supposons $x \in Z_f$. Cela signifie que $f(x) = 0$. On a alors :

$$g \circ f(x) = g(0) = \sin(0) = 0,$$

donc $x \in Z_{g\circ f}$.
Ceci démontre l'inclusion $Z_f \subset Z_{g\circ f}$.

b) Considérons la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x$. Posons $x = \pi$. Alors :
- d'une part, on a $f(x) = \pi \neq 0$ donc $x \notin Z_f$,
- d'autre part, $g \circ f(x) = \sin(\pi) = 0$ donc $x \in Z_{g\circ f}$.

Ainsi, il existe un élément $x \in \mathbb{R}$ tel que $x \in Z_{g\circ f}$ mais $x \notin Z_f$, ce qui démontre que $Z_f \neq Z_{g\circ f}$.
L'assertion « Pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on a $Z_f = Z_{g\circ f}$. » est donc fausse.

Cette dernière question était peut-être la plus difficile du sujet, car il s'agissait d'une question de recherche qui nécessitait de prendre du recul sur l'exercice et d'expérimenter sur quelques exemples. Il fallait comprendre que l'inclusion $Z_{f\circ g} \subset Z_f$ était équivalente à

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \sin(f(x)) = 0 \implies f(x) = 0.$$

Une fois cette reformulation établie, on se convainc que l'assertion ci-dessus sera fausse en général, car la fonction sinus s'annule en d'autres valeurs que zéro (par exemple, en π). On peut alors se contenter de donner un contre-exemple tel que celui proposé dans ce corrigé.

Exercice 3. Notons $P(n)$ l'assertion

$$\text{« } \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1} \text{ ».}$$

— *Initialisation.* Posons $n = 1$. On a alors :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1 \times (1+1)} = \frac{1}{1+1} = \frac{n}{n+1},$$

ainsi la propriété $P(1)$ est vraie.

— *Hérédité.* Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que l'assertion $P(n)$ soit vraie, c'est-à-dire qu'on a l'égalité

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

On a alors :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \qquad \text{par hypothèse de récurrence} \\
&= \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{n+1}{n+2}.
\end{aligned}$$

Ceci prouve que l'assertion $P(n+1)$ est vraie.

— *Conclusion.* L'assertion $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 4.

1. Les fonctions f et g étant définies sur $\mathbb{N}$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$, les fonctions composées $g \circ f$ et $f \circ g$ sont bien définies sur $\mathbb{N}$, à valeurs dans $\mathbb{N}$. Soit $x \in \mathbb{N}$.
   - Donnons l'expression de $g \circ f(x)$.
     On remarque que $f(x) = 2x$ est un nombre pair, d'où $g \circ f(x) = \frac{2x}{2} = x$.
   - Donnons l'expression de $f \circ g(x)$.
     Il faut cette fois distinguer deux cas :
     - si x est pair, alors $g(x) = \frac{x}{2}$ et donc $f \circ g(x) = 2 \times \frac{x}{2} = x$,
     - si x est impair, alors $g(x) = 0$ et donc $f \circ g(x) = 2 \times 0 = 0$.

   Finalement, on trouve les expressions suivantes :

$$\forall\, x \in \mathbb{N}, \qquad g \circ f(x) = x \qquad \text{et} \qquad f \circ g(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \text{ est pair,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

2. — *Injectivité de f.* Soient $(x, x') \in \mathbb{N}^2$. Supposons $f(x) = f(x')$. Par définition de f, cela signifie que $2x = 2x'$, et donc que $x = x'$.
   Ainsi, l'application f est injective.

- *Non-injectivité de* g. Posons $x = 1$ et $x' = 3$. Ce sont deux nombres impairs, donc $g(x) = 0 = g(x')$, et pourtant $x \neq x'$.

  Ceci prouve que l'application g n'est pas injective.

3. - *Non-surjectivité de* f. Prenons $y = 1$. L'équation $f(x) = y$ n'a pas de solution $x \in \mathbb{N}$: en effet,

   $$f(x) = y \iff 2x = 1 \iff x = \frac{1}{2} \notin \mathbb{N}.$$

   Ainsi, l'application f n'est pas surjective.

   - *Surjectivité de* g. Soit $y \in \mathbb{N}$. Posons $x = 2y$. Par définition, x est un entier naturel pair, on a donc

   $$g(x) = \frac{x}{2} = \frac{2y}{2} = y.$$

   Ainsi, l'application g est surjective.

4. On conclut aisément à l'aide des questions précédentes :
   - la fonction f n'est pas bijective car elle n'est pas surjective,
   - la fonction g n'est pas bijective car elle n'est pas injective.

Le lecteur attentif aura peut-être fait le lien avec le résultat de cours suivant : si $f : E \to F$ *et* $g : F \to E$ *sont des fonctions vérifiant les deux relations*

$$g \circ f = \mathrm{id}_E \qquad \textit{et} \qquad f \circ g = \mathrm{id}_F,$$

alors f *et* g *sont bijectives, et sont bijections réciproques l'une de l'autre.*

Cet exercice illustre l'importance que les ***deux*** *relations ci-dessus soient satisfaites : ici on vous donne deux fonctions* f *et* g *de* $\mathbb{N}$ *dans* $\mathbb{N}$ *vérifiant seulement* $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$*, et on constate que ni* f *ni* g *n'est bijective.*